BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ПОЧТИ ВСЮДУ МНОГОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

С.Дж.АЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет
samed_aliyev @ mail.ru

Работа посвящена изучению вопроса единственности решения почти всюду многомерной смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Введено понятие решения почти всюду изучаемой смешанной задачи. После применения метода Фурье решение исходной задачи сведено к решению некоторой счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье искомого решения. Далее, доказана теорема единственности решения почти всюду рассматриваемой смешанной задачи.

В работе изучается вопрос единственности решения почти всюду следующей многомерной смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} L(u(t,x)) = \text{☞}(u(t,x)) \quad (t \in [0,T], x \in \Omega), \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \quad (x \in \Omega), u_t(0,x) = \psi(x) \ (x \in \Omega), \tag{2}$$

$$u(t,x)\big|_{\Gamma} = 0, \tag{3}$$

где $0 < T < +\infty$; $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Omega - n$-мерная ограниченная область с достаточно гладкой границей S, $\Gamma = [0,T] \times S$;

$$L(u(t,x)) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_j} \right) - a(x)u(t,x), \tag{4}$$

причём функции $a_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1,n})$ и $a(x)$ измеримы и ограничены в Ω и в области Ω удовлетворяют условиям

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \; a(x) \geq 0, \; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \quad (\alpha = const > 0),$$

ξ_i - любые действительные числа; φ, ψ - заданные функции; ☞ - некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор, а $u(t,x)$ - искомая функция.

Определение. Решением почти всюду задачи (1)-(3) назовём функцию $u(t,x) \in \overset{\circ}{W}_1(Q_T)$ (см.[3], стр.39), принадлежащую пространству $L_2(Q_T)$, где $Q_T \equiv [0,T] \times \Omega$, вместе со всеми своими производными $u_t(t,x), u_{x_i}(t,x)$, $(i = \overline{1,n}), u_{tx_i}(t,x)$ $(i = \overline{1,n})$, $u_{x_i x_j}(t,x)$ $(i,j = \overline{1,n})$, $u_{tt}(t,x), u_{tx_i x_j}(t,x)$ $(i,j = \overline{1,n})$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в Q_T и принимающую начальные значения (2) почти всюду в Ω.

§1. Вспомогательные факты

С целью исследования решения почти всюду задачи (1)-(3) приведём некоторые известные факты и установим ряд новых вспомогательных фактов.

1. Как известно (см., напр., [2], стр.126), оператор L, порождённый дифференциальным выражением (4) и краевым условием (3), имеет счётную систему отрицательных собственных чисел

$$0 > -\lambda_1^2 \geq -\lambda_2^2 \geq \ldots \geq -\lambda_s^2 \geq \ldots \quad (0 < \lambda_s \to +\infty \text{ при } s \to \infty)$$

и соответствующую полную ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему обобщённых собственных функций $\vartheta_s(x)$, причём под обобщённой собственной функцией $\vartheta_s(x)$ оператора L понимаем такую не равную тождественно нулю функцию $\vartheta_s(x)$, которая принадлежит классу $\overset{\circ}{W}(\Omega)$ (см.[3], стр.38) и для любой функции $\Phi(x)$ из $\overset{\circ}{W}(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \vartheta_s(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_j} + a(x)\, \vartheta_s(x) \Phi(x) \right\} dx = \lambda_s^2 \int_\Omega \vartheta_s(x) \Phi(x) dx .$$

Очевидно, что каждое решение почти всюду задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x) = \sum_{s=1}^\infty u_s(t)\, \vartheta_s(x), \tag{5}$$

где $u_s(t) = \int_\Omega u(t,x)\, \vartheta_s(x) dx \quad (s = 1,2,\ldots)$. Тогда, после применения формальной схемы метода Фурье, нахождение коэффициентов Фурье $u_s(t)$ искомого решения почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_s(t) = \varphi_s + \frac{1}{\lambda_s^2}\left(1 - e^{-\lambda_s^2 t}\right)\psi_s +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_s^2} \int_0^t \int_\Omega F(u(\tau,x)) \cdot \left[1 - e^{-\lambda_s^2 (t-\tau)}\right] \cdot \vartheta_s(x) dx d\tau \quad (s = 1,2,\ldots; t \in [0,T]), \tag{6}$$

где

$$\varphi_s = \int_\Omega \varphi(x)\, \vartheta_s(x) dx, \qquad \psi_s = \int_\Omega \psi(x)\, \vartheta_s(x) dx .$$

2. Исходя из определения решения почти всюду задачи (1)-(3), легко доказывается следующая

Лемма. Если $u(t,x)$ является решением почти всюду задачи (1)-(3) и обобщённые производные $\dfrac{\partial}{\partial x_k} a_{ij}(x)\ (i,j,k=\overline{1,n})$ ограничены в Ω, то функции $u_s(t)\quad (s=1,2,\ldots)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (6).

3. Обозначим через $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ совокупность всех функций $u(t,x)$ вида (5), рассматриваемых в $[0,T]\times\Omega$, для которых все функции $u_s(t)\in C^{(l)}([0,T])$ и

$$J_T(u)\equiv\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_s^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<+\infty,$$

где $\alpha_i\ge 0,\ \ 1\le\beta_i\le 2\ \ \left(i=\overline{0,l}\right)$. Норму в этом множестве определим так: $\|u\|=J_T(u)$. Очевидно ([1]), что все эти пространства банаховы.

В дальнейшем для функций $u(t,x)\in B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ будем пользоваться обозначениями:

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,t}}\equiv\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|u_s^{(i)}(\tau)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}\qquad (t\in[0,T]).$$

4. Примем следующее обозначение:

Обозначим через G класс всех функций $u(t,x)$, для которых $u(t,x)$, $u_t(t,x)$, $u_{x_i}(t,x)\ (i=\overline{1,n})$, $u_{tx_i}(t,x)\ (i=\overline{1,n})$, $u_{x_ix_j}(t,x)\ (i,j=\overline{1,n})$, $u_{tt}(t,x)$, $u_{tx_ix_j}(t,x)$ $(i,j=\overline{1,n})\in L_2(Q_T)$.

5. В заключение параграфа условимся всюду в этой работе считать все величины вещественными, все функции действительнозначными, а интегралы всюду понимать в смысле Лебега.

§2. Исследование единственности решения почти всюду задачи (1)-(3)

В этом параграфе доказывается следующая теорема о единственности в целом решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема. Если для любых $u,V\in G\cap\mathring{W}_1(Q_T)$, таких, что $u-V\in B^{2,1}_{2,2,T}$, почти всюду в $(0,T)$:

$$\left\|F(u(t,x))-F(V(t,x))\right\|_{L_2(\Omega)}\le a_{u,V}(t)\cdot\|u-V\|_{B^1_{2,t}}+b_{u,V}(t)\cdot\|u-V\|_{B^{2,1}_{2,2,t}},\qquad(7)$$

где для каждого $t_0\in[0,T)$ существует такое $\delta(t_0)\ \ (0<\delta(t_0)\le T-t_0)$, что $(t-t_0)\cdot a_{u,V}(t), b_{u,V}(t)\in L_2(t_0,t_0+\delta(t_0))$, то задача (1)-(3) не может иметь более одного решения почти всюду.

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть задача (1)-(3) имеет, по крайней мере, два различных решения почти всюду:

$$u(t,x)=\sum_{s=1}^{\infty}u_s(t)\,❖_s(x) \quad \text{и} \quad V(t,x)=\sum_{s=1}^{\infty}V_s(t)\,❖_s(x)\,.$$

В силу леммы каждая из последовательностей $\{u_s(t)\}_{s=1}^{\infty}$ и $\{V_s(t)\}_{s=1}^{\infty}$ удовлетворяет на $[0,T]$ системе (6). Так как

$$\|u-V\|_{B_{2,2,T}^{2,1}} \le \left(\sqrt{T}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left\{\int_0^T\int_\Omega [☞(u(t,x))-☞(V(t,x))]^2\,dxdt\right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty\,, \tag{8}$$

то $u-V\in B_{2,2,T}^{2,1}$. Примем следующее обозначение:

$$t_0 \equiv \max\left\{t : t\in[0,T],\ \|u-V\|_{B_{2,2,t}^{2,1}}=0\right\}. \tag{9}$$

По предположению $0\le t_0<T$, ибо в случае $t_0=T$ получили бы $\|u-V\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}$=0, т.е. $u=V$, что противоречило бы предположению. По определению числа t_0 $\|u-V\|_{B_{2,2,t_0}^{2,1}}=0$. Отсюда, в силу структуры пространства $B_{2,2,T}^{2,1}$, следует, что $\forall t\in[0,t_0]$ $\|u-V\|_{B_{2,2,t}^{2,1}}=0$ и, следовательно, $\forall t\in[0,t_0]$

$$\|u-V\|_{B_{2,t}^{2}}=\|u-V\|_{B_{2,2,t}^{2,1}}=0\,.$$

Тогда из (7) видно, что $\forall t\in[0,t_0]$ $\|☞(u(t,x))-☞(V(t,x))\|_{L_2(\Omega)}=0$, т.е. при любом фиксированном $t\in[0,t_0]$ для почти всех $x\in\Omega$ $☞(u(t,x))=$ $=☞(V(t,x))$. Учитывая это, из системы (6) получаем, что $\forall s$ $(s=1,2,...)$ и $\forall t\in[t_0,T]$:

$$|u_s(t)-V_s(t)|^2 \le \frac{(t-t_0)^2}{2\lambda_s^2}\cdot\int_{t_0}^{t}\left\{\int_\Omega[☞(u(\tau,x))-☞(V(\tau,x))]\cdot ❖_s(x)dx\right\}^2 d\tau\,, \tag{10}$$

$$|u_s(t)-V_s(t)|^2 \le \frac{(t-t_0)}{\lambda_s^4}\cdot\int_{t_0}^{t}\left\{\int_\Omega[☞(u(\tau,x))-☞(V(\tau,x))]\cdot ❖_s(x)dx\right\}^2 d\tau\,, \tag{11}$$

$$|u_s'(t)-V_s'(t)|^2 \le \frac{1}{2\lambda_s^2}\cdot\int_{t_0}^{t}\left\{\int_\Omega[☞(u(\tau,x))-☞(V(\tau,x))]\cdot ❖_s(x)dx\right\}^2 d\tau\,. \tag{12}$$

По определению числа t_0 для любых s $(s=1,2,...)$ и $t\in[t_0,T]$ $u_s(t)=V_s(t)$ и $u_s'(t)=V_s'(t)$. Учитывая это, из неравенств (10)-(12) получаем, что $\forall t\in[t_0,T]$:

$$\|u-V\|_{B_{2,t}^{1}}^2=\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_s(\tau)-V_s(\tau)|\right)^2 \le \frac{(t-t_0)^2}{2}\|☞(u)-☞(V)\|_{L_2(Q_T)}^2, \tag{13}$$

$$\|u-V\|_{B_{2,2,t}^{2,1}}^2 \le (2T+1)\cdot\|☞(u)-☞(V)\|_{L_2(Q_T)}^2\,. \tag{14}$$

Для любого $\delta \ (0<\delta\le\delta(t_0))$ примем обозначения:

$$\sup_{t\in(t_0,t_0+\delta)}\left\{(t-t_0)^{-2}\cdot\|u-V\|^2_{B^1_{2,t}}\right\}\equiv A_\delta<+\infty, \tag{15}$$

$$\sup_{t\in(t_0,t_0+\delta)}\left\{\|u-V\|^2_{B^{2,1}_{2,2,t}}\right\}\equiv B_\delta<+\infty. \tag{16}$$

Пользуясь обозначениями (15),(16) и неравенством (7), из (13) получаем, что при любом $\delta \ (0<\delta\le\delta(t_0)) \ \ \forall t\in(t_0,t_0+\delta)$:

$$(t-t_0)^{-2}\cdot\|u-V\|^2_{B^1_{2,t}}\le(A_\delta+B_\delta)\cdot\int_{t_0}^{t_0+\delta}\left\{(\tau-t_0)^2\cdot a^2_{u,V}(\tau)+b^2_{u,V}(\tau)\right\}d\tau. \tag{17}$$

Так как в неравенстве (17) правая часть не зависит от t, то левая часть в интервале $(t_0,t_0+\delta)$ ограничена. Тогда, пользуясь обозначением (15), из (17) получаем:

$$A_\delta\le(A_\delta+B_\delta)\cdot\int_{t_0}^{t_0+\delta}\left\{(\tau-t_0)^2\cdot a^2_{u,V}(\tau)+b^2_{u,V}(\tau)\right\}d\tau. \tag{18}$$

Аналогично, из (14) получаем, что $\forall\delta \ (0<\delta\le\delta(t_0))$:

$$B_\delta\le 2(2T+1)\cdot(A_\delta+B_\delta)\cdot\int_{t_0}^{t_0+\delta}\left\{(\tau-t_0)^2\cdot a^2_{u,V}(\tau)+b^2_{u,V}(\tau)\right\}d\tau. \tag{19}$$

Складывая неравенства (18) и (19), получаем:

$$(A_\delta+B_\delta)\le(4T+3)\cdot(A_\delta+B_\delta)\cdot\int_{t_0}^{t_0+\delta}\left\{(\tau-t_0)^2\cdot a^2_{u,V}(\tau)+b^2_{u,V}(\tau)\right\}d\tau. \tag{20}$$

Если число $\delta=\delta^* \ (0<\delta^*\le\delta(t_0)\le T-t_0)$ выбрать и фиксировать так, чтобы выполнялось неравенство

$$(4T+3)\cdot\int_{t_0}^{t_0+\delta^*}\left\{(\tau-t_0)^2\cdot a^2_{u,V}(\tau)+b^2_{u,V}(\tau)\right\}d\tau<1$$

(это возможно по теореме Лебега об абсолютной непрерывности интеграла Лебега), то из неравенства (20) получим: $A_{\delta^*}+B_{\delta^*}=0$. Следовательно, $A_{\delta^*}=B_{\delta^*}=0$. В частности, из $B_{\delta^*}=0$ следует, что $\|u-V\|_{B^{2,1}_{2,2,t_0+\delta^*}}=0$. А это, в силу положительности числа δ^*, противоречит определению числа t_0, определенного соотношением (9). Полученное противоречие доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. Дис...докт.физ.-мат.наук. Азербайджанский Государственный Университет, Баку, 1973, 319 с.
2. Михлин С.Г. Проблема минимума квадратичного функционала. М.-Л.: Гостехиздат, 1952, 216 с.
3. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.-Л.: Гостехиздат, 1953, 279 с.

SAĞ TƏRƏFİ QEYRİ-XƏTTİ OPERATOR OLAN BİR SİNİF ÜÇÜNCÜ TƏRTİB DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN ÇOXÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN SANKİ HƏR YERDƏ HƏLLİNİN YEGANƏLİYİ HAQQINDA

S.C.ƏLİYEV

XÜLASƏ

İş sağ tərəfi qeyri-xətti operator olan bir sinif üçüncü tərtib diferensial tənliklər üçün çoxölçülü qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin yeganəliyi məsələsinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Öyrənilən qarışıq məsələsinin sanki hər yerdə həllinə tərif verilir. Furye metodunu tətbiq etdikdən sonra baxılan məsələnin həlli axtarılan həllin naməlum Furye əmsallarına nəzərən müəyyən hesabi qeyri-xətti inteqro-diferensial tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. Nəticədə baxılan qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin yeganəliyi haqqında teorem isbat edilmişdir.

UNIQUENESS OF ALMOST EVERYWHERE SOLUTION OF THE MULTI-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR ONE CLASS THIRD ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NON-LINEAR OPERATOR IN THE RIGHT-HAND SIDE

S.J.ALIYEV

SUMMARY

This work is dedicated to the study of uniqueness of almost everywhere solution of multi-dimensional mixed problem for one class third order differential equations with a non-linear operator in the right-hand side. Conception of almost everywhere solution for mixed problem under consideration is introduced. After applying Fourier method, the solution of the original problem is reduced to the solution of some countable system of non-linear integro-differential equations in unknown Fourier coefficients of the sought solution. Besides, the uniqueness theorem of almost everywhere solution of original problem is proved in the article.